

2. Le modèle néoclassique standard

Étienne Lalé
(lale.etienne@uqam.ca)

Table des matières

1	Le modèle de croissance néoclassique	4
1.1	Environnement économique	4
1.2	L'optimum social	5
1.3	L'équilibre décentralisé	8
1.4	Comportement dynamique au voisinage de l'équilibre	10
1.5	Le sentier de croissance équilibré	13
2	Chocs agrégés : le modèle de cycle économique réel	16
2.1	Le modèle RBC	16
2.2	Comptabilité de la croissance	23
2.3	La relation théorie vs. faits empiriques : calibration et analyse du modèle RBC	23
3	Performance et extensions du modèle	27
3.1	Evaluation du modèle RBC	27
3.2	Quelques extensions du modèle RBC standard	29

Références

- David K Backus, Patrick J Kehoe, and Finn E Kydland. International real business cycles. *Journal of Political Economy*, 100(4) :745–775, 1992. [29](#)
- Jess Benhabib, Richard Rogerson, and Randall Wright. Homework in macroeconomics : Household production and aggregate fluctuations. *Journal of Political Economy*, 99(6) :1166–1187, 1991. [29](#)
- Michele Boldrin, Lawrence J Christiano, and Jonas DM Fisher. Habit persistence, asset returns, and the business cycle. *American Economic Review*, 91(1) :149–166, 2001. [29](#)
- Fabio Canova. *Methods for applied macroeconomic research*. Princeton University Press, NJ, 2011. [10](#), [23](#)
- Lawrence J Christiano and Martin Eichenbaum. Current real-business-cycle theories and aggregate labor-market fluctuations. *American Economic Review*, 82(3) :430–450, 1992. [29](#)
- Timothy Cogley and James M Nason. Output dynamics in real-business-cycle models. *American Economic Review*, 85(3) :492–511, 1995. [29](#)
- Isabel Correia, Joao C Neves, and Sergio Rebelo. Business cycles in a small open economy. *European Economic Review*, 39(6) :1089–1113, 1995. [29](#)
- Jeremy Greenwood, Zvi Hercowitz, and Gregory W Huffman. Investment, capacity utilization, and the real business cycle. *American Economic Review*, 78(3) :402–417, 1988. [29](#)
- James Douglas Hamilton. *Time series analysis*, volume 2. Princeton university press, NJ, 1994. [26](#)
- Gary D Hansen. Indivisible labor and the business cycle. *Journal of Monetary Economics*, 16(3) :309–327, 1985. [29](#)
- Nir Jaimovich and Sergio Rebelo. Can news about the future drive the business cycle? *American Economic Review*, 99(4) :1097–1118, 2009. [29](#)
- Robert G King and Sergio T Rebelo. Resuscitating real business cycles. *Handbook of Macroeconomics*, 1 :927–1007, 1999. [27](#)
- Robert G King, Charles I Plosser, and Sergio T Rebelo. Production, growth and business cycles : I. The basic neoclassical model. *Journal of Monetary Economics*, 21(2-3) :195–232, 1988. [15](#), [21](#), [24](#), [26](#), [27](#), [28](#)
- Finn E Kydland and Edward C Prescott. Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 50(6) :1345–1370, 1982. [27](#), [28](#)
- Lars Ljungqvist and Thomas J Sargent. *Recursive macroeconomic theory*. MIT press, 2018. [18](#)

John B Long Jr and Charles I Plosser. Real business cycles. *Journal of Political Economy*, 91 (1) :39–69, 1983. [21](#)

Enrique G Mendoza. Real business cycles in a small open economy. *American Economic Review*, 81(4) :797–818, 1991. [29](#)

Sergio Rebelo. Real business cycle models : Past, present and future. *Scandinavian Journal of Economics*, 107(2) :217–238, 2005. [27](#)

Nancy L Stokey, Robert E Lucas Jr, and Edward C Prescott. *Recursive methods in economic dynamics*. Harvard University Press, 1989. [7](#), [10](#)

1 Le modèle de croissance néoclassique

1.1 Environnement économique

Préférences

L'économie est habitée par un continuum de ménages. L'horizon de vie d'un ménage est infini et ses préférences dépendent de la consommation et du loisir :

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, L_t), \quad 0 < \beta < 1. \quad (1)$$

C_t désigne la consommation et L_t le loisir en période t . A chaque période, le ménage dispose d'une unité de temps qu'il choisit d'allouer au loisir L_t ou au travail N_t . $u(C, L)$ désigne l'utilité instantanée ou utilité intra-période. On suppose que $u_C > 0$ et $u_L > 0$ et que $u(C, L)$ est strictement concave en ses deux arguments, deux fois continument différentiable et qu'elle vérifie les conditions d'Inada, *i.e.*

$$\lim_{C \rightarrow 0} u_C(C, L) = \infty \quad \lim_{C \rightarrow \infty} u_C(C, L) = 0,$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} u_L(C, L) = \infty \quad \lim_{L \rightarrow 1} u_L(C, L) = 0.$$

Le paramètre β est le facteur d'escompte du ménage. $\frac{1-\beta}{\beta}$ est le taux d'escompte subjectif.

Technologie

Il y a un seul bien dans l'économie appelé « bien final ». Ce bien est produit en combinant du capital et du travail au moyen d'une fonction de production à rendements d'échelle constants :

$$Y_t = F(K_t, N_t).$$

K_t est le stock de capital par tête pré-déterminé en période t ; « pré-déterminé » signifie ici que le niveau de capital a été déterminé en période $t - 1$ et qu'il est donc fixe en début de période t . N_t est la quantité de travail par tête en période t . On suppose que $F(K, N)$ est concave en ses deux arguments, deux fois continument différentiable, et vérifie les conditions d'Inada, *i.e.*

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_K(K, N) = \infty \quad \lim_{K \rightarrow \infty} F_K(K, N) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow 0} F_K(K, N) = \infty \quad \lim_{N \rightarrow \infty} F_K(K, N) = 0.$$

Accumulation du capital

Il y a deux usages possibles du bien final : la consommation et l'investissement. Investir signifie que le bien final vient alimenter le stock de capital, lequel évolue selon l'équation

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t, \quad 0 < \delta < 1. \quad (2)$$

I_t est l'investissement par tête et δ est le taux de dépréciation du capital. Par conséquent, $I_t - \delta K_t$ est l'investissement net en capital.

Contraintes de ressource

La taille de la population est constante au cours du temps. A chaque période t , les choix de consommation, d'investissement et des intrants de production (inputs) sont assujettis aux contraintes de ressource suivantes :

$$\begin{aligned} L_t + N_t &\leq 1, \\ C_t + I_t &\leq Y_t. \end{aligned}$$

La première contrainte exprime le fait que le temps alloué au loisir et au travail ne peut excéder le temps dont disposent les ménages. La deuxième contrainte exprime le fait que les emplois du bien final (consommation ou investissement) ne peuvent excéder la ressource disponible (la production totale). Enfin, les variables vérifient également des contraintes de signe, à savoir : $L_t, N_t, K_{t+1}, C_t \geq 0$.

1.2 L'optimum social

Pour déterminer l'allocation optimale, on se place du point de vue d'un agent appelé le *planificateur social*. Cet agent effectue (ou effectuerait) les choix de consommation et de production de manière à maximiser la somme pondérée de l'utilité des ménages. Comme les ménages ont des préférences identiques, son objectif est donc de choisir une séquence $\{C_t, L_t, Y_t, I_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}$ de manière à maximiser la fonction d'utilité (1) sous les contraintes liées à la technologie, les ressources et la contrainte de signe des variables, et en prenant comme donné le stock de capital initial (*i.e.* de la période 0) noté K_0 .

Autrement dit, l'objectif du planificateur social est

$$\max_{\{C_t, L_t, Y_t, I_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, L_t)$$

sous les contraintes suivantes pour tout $t = 0, \dots, \infty$:

$$\begin{aligned}
1 &\geq L_t + N_t \\
Y_t &\geq C_t + I_t \\
K_{t+1} &= I_t + (1 - \delta) K_t \\
Y_t &= F(K_t, N_t) \\
0 &\leq K_{t+1}, C_t \quad 0 \leq L_t \leq 1 \quad 0 \leq N_t \leq 1 \\
K_0 &\text{ donné}
\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un problème assujéti à une *séquence* de contraintes, puisque celles-ci doivent être vérifiées à toute date t . Le problème est équivalent au problème contraint d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
\max_{\{K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(F(K_t, N_t) + (1 - \delta) K_t - K_{t+1}, 1 - N_t) \\
\text{s.c.} & 0 \leq N_t \leq 1, \quad 0 \leq K_{t+1}, \quad K_0 \text{ donné.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Sous cette formulation, le problème est de déterminer la suite $\{K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}$ à partir de K_t en période $t = 0$. Pour ce faire, on utilise les conditions du premier ordre associées à une solution intérieure, lesquelles doivent être vérifiées pour tout $t > 0$. Elles s'écrivent :

$$K_{t+1} : -u_C(C_t, 1 - N_t) + \beta [u_C(C_{t+1}, 1 - N_{t+1}) (F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + 1 - \delta)] = 0 \tag{4a}$$

$$N_t : -u_L(C_t, 1 - N_t) + u_C(C_t, 1 - N_t) F_N(K_t, N_t) = 0 \tag{4b}$$

avec $C_t = F(K_t, N_t) + (1 - \delta) K_t - K_{t+1}$. Ces équations, appelées *équations d'Euler*, définissent implicitement une équation de récurrence du second ordre non linéaire pour la variable K . Si on a pour seule condition supplémentaire la condition initiale K_0 , il y a une infinité de solutions possibles (*i.e.* une infinité de trajectoires possibles pour K_t à partir de K_0). On a donc besoin d'une condition supplémentaire pour obtenir une unique trajectoire optimale du stock de capital. Cette condition porte sur l'autre « borne » du problème, *i.e.* sur le comportement en $+\infty$. C'est la condition dite *condition de transversalité*, donnée par

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T u_C(C_T, 1 - N_T) K_{T+1} = 0. \tag{4c}$$

Pour comprendre la condition de transversalité, supposons *a contrario* que la relation suivante soit vérifiée : $\beta^T u_C(C_T, 1 - N_T) K_{T+1} > 0$ avec T arbitrairement grand. Dans ce cas, on a $\beta^T u_C(C_T, 1 - N_T) > 0$ et $K_{T+1} > 0$. La trajectoire n'est donc pas optimale puisque, du point de vue de la période initiale, on pourrait augmenter l'utilité en consommant une partie du capital existant à cette date. Par conséquent, on a soit : $\beta^T u_C(C_T, 1 - N_T) = 0$ et $K_{T+1} > 0$ (le capital ne permet pas d'augmenter l'utilité), soit : $\beta^T u_C(C_T, 1 - N_T) \geq 0$ et $K_{T+1} = 0$ (il n'y a plus de capital disponible). Autrement dit, la condition de transversalité signifie que la valeur escomptée du stock de capital restant à $T = \infty$ doit être nulle ; sinon, ce capital devrait être consommé.

Les conditions (4a) à (4c) sont nécessaires pour obtenir une trajectoire optimale du stock de capital. Les hypothèses sur les fonctions u et F impliquent de plus que ces conditions sont suffisantes pour obtenir un maximum¹.

Le problème du planificateur peut être formulé sous forme récursive. Pour ce faire, on appelle $v(K_0)$ la valeur de (3) évaluée à l'optimum à partir de la condition K_0 , *i.e.* la valeur de la somme obtenue le long de la trajectoire optimale $\{K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}$ à partir de K_0 . La formulation sous forme de problème récursif signifie que pour toute valeur de la variable d'état K_t , le problème (3) peut être s'écrit :

$$v(K_t) = \max_{0 \leq N_t \leq 1, 0 \leq K_{t+1}} u(F(K_t, N_t) + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}, 1 - N_t) + \beta v(K_{t+1}).$$

Résoudre le problème ainsi formulé consiste à trouver la fonction v , invariante dans le temps, solution de l'équation de Bellman. Puisque le problème est le même quel que soit t , on peut ré-écrire le problème sans l'indice t :

$$v(K) = \max_{0 \leq N \leq 1, 0 \leq K'} u(F(K, N) + (1 - \delta)K - K', 1 - N) + \beta v(K'). \quad (5)$$

La fonction valeur $v(K)$ permet de définir des fonctions de décisions $K' = k(K)$ et $N = n(K)$. Ces fonctions transforment la variable d'état K en variables de contrôle K' et N de sorte que fonction valeur $v(K)$ devient :

$$v(K) = u(F(K, n(K)) + (1 - \delta)K - k(K), 1 - n(K)) + \beta v(k(K)). \quad (6)$$

La programmation dynamique désigne l'approche d'optimisation basée sur les fonctions valeur et fonctions de décision.

Les équations d'Euler peuvent également être obtenues directement à partir du problème (5). Sous l'hypothèse que la fonction valeur v est dérivable et que le problème de maximisation défini à droite de l'équation admet une solution intérieure, les conditions du premier ordre du problème de maximisation (5) sont :

$$K' : -u_C(C, 1 - N) + \beta v_K(K') = 0 \quad (7a)$$

$$N : -u_L(C, 1 - N) + u_C(C, 1 - N) F_N(K, N) = 0 \quad (7b)$$

avec $C = F(K, N) + (1 - \delta)K - K'$. Ces équations définissent une équation de récurrence non-linéaire du premier ordre qui admet une unique solution à K donné, si bien qu'il ne manque pas de condition du type « condition aux bornes » pour trouver la solution. En utilisant le théorème de l'enveloppe, il vient que

$$v_K(K) = u_C(C, 1 - N) (F_K(K, N) + 1 - \delta). \quad (8)$$

1. Sur ce point, voir le théorème 4.15 dans le manuel de Stokey et al. [1989].

En remplaçant v_K dans l'équation (7a) par l'expression obtenue dans (8), et en remplaçant C par C_t , N par N_t et K' par K_{t+1} , on retrouve les équations d'Euler (4a) et (4b).

Dans la suite du cours, on aborde le plus souvent les problèmes d'optimisation semblables au problème (3) en termes des fonctions de décision solutions des conditions d'Euler. Dans le cas présent, il s'agit par exemple de trouver les fonctions $K_{t+1} = k(K_t)$, $C_t = c(K_t)$, $N_t = n(K_t)$ qui satisfont les conditions suivantes pour tout $t > 0$:

$$-u_C(c(K_t), 1 - n(K_t)) + \beta [u_C(c(k(K_t)), 1 - n(k(K_t))) \times (F_K(k(K_t), n(k(K_t))) + 1 - \delta)] = 0 \quad (9a)$$

$$-u_L(c(K_t), 1 - n(K_t)) + u_C(c(K_t), 1 - n(K_t)) F_N(K_t, n(K_t)) = 0 \quad (9b)$$

avec, de plus, $c(K_t) = F(K_t, n(K_t)) + (1 - \delta)K_t - k(K_t)$. Etant donnée la condition initiale K_0 , on peut itérer sur ces équations afin de construire la séquence $\{K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}$ solution du problème (3). Si cette approche via les conditions d'Euler fonctionne dans le cas présent, elle ne permet pas de résoudre certains problèmes d'optimisation abordés dans le cours, ce qui justifiera l'utilisation de la programmation dynamique².

1.3 L'équilibre décentralisé

L'allocation choisie par le planificateur confronté au problème (3) coïncide avec celle obtenue à l'équilibre de concurrence pure et parfaite de cette économie. Autrement dit, l'équilibre décentralisé est optimal au sens de Pareto. L'équivalence entre l'allocation choisie par le planificateur social et l'allocation de l'équilibre décentralisé dépend des conditions sous-jacentes aux théorèmes élémentaires du bien-être ; l'équivalence est obtenue lorsqu'il n'y a ni taxe, ni compétition imparfaite, ni aucune autre source de distorsion. On verra plus loin des exemples où le résultat d'équivalence ne tient plus. A ce titre, il est utile de formuler l'équilibre décentralisé du modèle néoclassique standard.

Dans l'économie décentralisée, à chaque période les ménages vendent les services de leur travail et du capital aux entreprises, achètent le bien produit par ces entreprises, consomment une partie de ce bien et épargnent la partie restante sous forme de capital. Les échanges ont lieu sur des marchés décentralisés qui sont à l'équilibre à chaque période. Le prix du bien de consommation finale en période t est p_t . Le prix de location d'une unité de capital exprimé en terme du bien de consommation finale en période t est r_t (r_t est donc le taux d'intérêt réel). Le prix d'une heure de travail exprimé en terme du bien de consommation finale en période t est w_t (w_t est donc le salaire réel).

2. Par exemple, l'approche via les conditions d'Euler ne permet pas de résoudre le problème dynamique (3) lorsque le travail est supposé indivisible, *i.e.* lorsque N est contraint de prendre des valeurs discrètes (aucun travail vs. temps plein).

Les entreprises

Soit l'entreprise j prise parmi l'ensemble des entreprises dont le nombre total est fixé à J . La valeur de l'entreprise j à la période t est

$$Q_t^j = (q_t^j + \pi_t^j) S_t^j \quad (10)$$

avec π_t^j le dividende ou le profit par action et q_t^j le prix d'une action, et S_t^j le nombre total d'action émises par l'entreprise j . On peut poser $S_t^j = 1$ sans perte de généralité. Les profits de l'entreprise en période t sont

$$\pi_t^j = p_t Y_t^j - r_t K_t^j - w_t N_t^j. \quad (11)$$

La production d'output s'effectue sous la contrainte technologique suivante :

$$Y_t^j \leq F(K_t^j, N_t^j). \quad (12)$$

L'objectif de l'entreprise est de maximiser sa valeur (équation (10)). Pour ce faire, les variables de choix de l'entreprise sont Y_t^j , K_t^j et N_t^j . Les contraintes auxquelles l'entreprise fait face sont la contrainte technologique (12) et les contraintes de signe des variables Y_t^j , K_t^j et N_t^j . Enfin, l'entreprise est preneuse de prix vis-à-vis de q_t^j , p_t , r_t et w_t . La maximisation de (10) est donc équivalente à la maximisation du profit défini dans l'équation (11). Le problème de l'entreprise est un problème statique, puisque les équations qui le définissent ne sont pas des équations inter-temporelles.

Les ménages

Soit le ménage i pris parmi l'ensemble des ménages dont le nombre total est fixé à I . Chaque ménage dispose initialement d'un stock de capital K_0 et de parts s_0^j dans chacune des entreprises j . Les préférences des ménages sont identiques, si bien que l'utilité du ménage i est

$$U^i = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t^i, 1 - N_t^i), \quad 0 < \beta < 1. \quad (13)$$

A chaque période t , la contrainte budgétaire du ménage i est

$$p_t C_t^i + K_{t+1}^i - (1 - \delta) K_t^i + \sum_J q_t^j s_{t+1}^{ij} \leq w_t N_t^i + r_t K_t^i + \sum_J (q_t^j + \pi_t^j) s_t^{ij}. \quad (14)$$

L'objectif du ménage est de maximiser son utilité (équation (13)). Pour ce faire, il choisit une séquence $\{C_t^i, K_{t+1}^i, N_t^i, s_{t+1}^{i1}, \dots, s_{t+1}^{iJ}\}_{t=0}^{\infty}$. Les contraintes auxquelles le ménage fait face sont la contrainte budgétaire (14) et les contraintes de signe habituelles. Le ménage est preneur de prix s'agissant de la séquence $\{p_t, r_t, w_t, q_{t+1}^1, \dots, q_{t+1}^J\}_{t=0}^{\infty}$ et de la séquence des dividendes $\{\pi_t^1, \dots, \pi_t^J\}_{t=0}^{\infty}$. Il prend également pour données les dotations initiales K_0 et s_0^1, \dots, s_0^J .

L'équilibre de marché

L'équilibre de marché de l'économie est défini par l'ensemble d'allocations $\{C_t^i, K_{t+1}^i, N_t^i, s_{t+1}^{i1}, \dots, s_{t+1}^{iJ}\}_{t=0}^\infty$ avec $i = 1, \dots, I$, l'allocation $\{Y_t^j, K_t^j, N_t^j\}$ avec $j = 1, \dots, J$, et l'ensemble de prix $\{p_t, r_t, w_t, q_{t+1}^1, \dots, q_{t+1}^J\}_{t=0}^\infty$ tels que :

- L'allocation $\{C_t^i, K_{t+1}^i, N_t^i, s_{t+1}^{i1}, \dots, s_{t+1}^{iJ}\}_{t=0}^\infty$ est solution du problème du ménage i
- L'allocation $\{Y_t^j, K_t^j, N_t^j\}$ est solution du problème de la firme j
- A chaque période t , tous les marchés sont à l'équilibre, *i.e.*

$$\sum_J Y_t^j = \sum_I (C_t^i + K_{t+1}^i - (1 - \delta) K_t^i) \quad (15a)$$

$$\sum_I N_t^i = \sum_J N_t^j \quad (15b)$$

$$\sum_I K_t^i = \sum_J K_t^j \quad (15c)$$

$$\sum_I s_t^{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, J \quad (15d)$$

Quelques exercices utiles :

Exercice 1 Montrer que les séquences qui vérifient les conditions (4a) à (4c) sont compatibles avec l'équilibre de marché.

Exercice 2 Montrer que la valeur de chaque entreprise est égale à la somme escomptée des flux de profits qu'elle génère.

Exercice 3 Répéter les exercices 1 et 2 en supposant que les entreprises sont propriétaires du stock de capital.

1.4 Comportement dynamique au voisinage de l'équilibre

On s'intéresse au problème suivant : comment trouver les fonctions de décision $K_{t+1} = k(K_t)$, $C_t = c(K_t)$, $N_t = n(K_t)$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $t > 0$:

$$-u_C(C_t, 1 - N_t) + \beta [u_C(C_{t+1}, 1 - N_{t+1}) (F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + 1 - \delta)] = 0 \quad (16a)$$

$$-u_L(C_t, 1 - N_t) + u_C(C_t, 1 - N_t) F_N(K_t, N_t) = 0 \quad (16b)$$

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t - F(K_t, N_t) = 0 \quad (16c)$$

Dans le cas général, on ne dispose pas de solution analytique. Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour approximer les fonctions de décision. Il existe de nombreuses méthodes d'approximation. On s'intéresse ici à la plus simple de ces méthodes, à savoir la loglinéarisation au voisinage de l'équilibre³.

La méthode consiste à approximer la solution au moyen d'un système d'équations de récurrence linéaire. On obtient ce système grâce à un développement de Taylor (au premier ordre) au

3. Voir l'annexe A du cours. Pour plus d'information, voir les sections 6.3 et 6.4 de [Stokey et al. \[1989\]](#). On peut aussi consulter la section 2.2 de [Canova \[2011\]](#) pour une comparaison des méthodes d'approximation.

voisinage d'un point donné. On effectue presque toujours cette approximation autour de l'équilibre stationnaire. Clairement, cette approche s'avère problématique dans les cas suivants : 1) lorsque les perturbations autour de l'équilibre sont de grande amplitude et/ou que le système est fortement non-linéaire, 2) lorsque le modèle n'admet pas d'équilibre stationnaire ou bien lorsqu'il admet plusieurs équilibres stationnaires.

L'équilibre stationnaire

Les niveaux de capital \bar{K} , de travail \bar{N} et de consommation \bar{C} à l'équilibre stationnaire sont définis implicitement par le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} F_K(\bar{K}, \bar{N}) &= \frac{1}{\beta} - 1 + \delta, \\ F_N(\bar{K}, \bar{N}) &= \frac{u_L(\bar{C}, 1 - \bar{N})}{u_C(\bar{C}, 1 - \bar{N})}, \\ \bar{C} + \delta\bar{K} &= F(\bar{K}, \bar{N}). \end{aligned}$$

Le système d'équations de récurrence linéaire

On pose $\hat{x}_t = \log\left(\frac{X_t}{\bar{X}}\right)$ où X désigne une variable quelconque du modèle. Au voisinage de la valeur d'équilibre \bar{X} , \hat{x}_t s'interprète comme le pourcentage de déviation par rapport à la valeur d'équilibre. En linéarisant chacune des conditions (16a)–(16c) autour de l'équilibre stationnaire, on obtient :

$$\xi_{cc}\hat{c}_t - \xi_{cl}\frac{\bar{N}}{1-\bar{N}}\hat{n}_t = \xi_{cc}\hat{c}_{t+1} - \xi_{cl}\frac{\bar{N}}{1-\bar{N}}\hat{n}_{t+1} + (1 - \beta(1 - \delta))\left(\eta_{kn}\hat{n}_{t+1} + \eta_{kk}\hat{k}_{t+1}\right) \quad (17a)$$

$$\eta_{mn}\hat{n}_t + \eta_{nk}\hat{k}_t = (\xi_{lc} - \xi_{cc})\hat{c}_t + (\xi_{cl} - \xi_{ll})\frac{\bar{N}}{1-\bar{N}}\hat{n}_t \quad (17b)$$

$$s_c\hat{c}_t + \frac{s_i}{\delta}\hat{k}_{t+1} = \left((1 - \alpha) + s_i\frac{1 - \delta}{\delta}\right)\hat{k}_t + \alpha\hat{n}_t \quad (17c)$$

ξ_{ab} désigne l'élasticité de l'utilité marginale de a par rapport à b évaluée au voisinage de l'équilibre ; η_{ab} désigne l'élasticité de la productivité marginale de a par rapport à b évaluée au voisinage de l'équilibre ; s_c et s_i sont les parts respectives de la consommation et de l'investissement dans la production totale à l'équilibre ; enfin, α est l'élasticité de la production par rapport au travail.

En éliminant \hat{n}_t de ce système d'équations, on peut ré-écrire celui-ci sous forme d'un système de deux équations en \hat{k}_t et \hat{c}_t :

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Pour trouver la solution de ce système et établir ses propriétés, on calcule les valeurs propres de W . Celles-ci permettent d'écrire $W = P\lambda P^{-1}$, avec P la matrice des vecteurs propres et λ la matrice diagonale des valeurs propres. Etant données des conditions initiales \hat{k}_0 et \hat{c}_0 , la solution

générale de (18) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} = W^t \begin{bmatrix} \hat{k}_0 \\ \hat{c}_0 \end{bmatrix} = P\lambda^t P^{-1} \begin{bmatrix} \hat{k}_0 \\ \hat{c}_0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Dans le calcul des valeurs propres de W , on obtient une valeur propre inférieure à 1 et une valeur propre supérieure à 1. Par conséquent, la solution du système à partir d'une valeur quelconque \hat{c}_0 risque de diverger. Il doit donc exister une valeur particulière de \hat{c}_0 telle que la solution obtenue satisfait les conditions aux bornes. Cette solution particulière détermine l'unique trajectoire optimale $\{\hat{k}_{t+1}, \hat{c}_t\}_{t=0}^{\infty}$ le long de laquelle les trajectoires du travail et de l'output peuvent également être calculées.

Une solution communément utilisée pour obtenir les fonctions de décisions linéarisées est la méthode dite des coefficients indéterminés. Supposons que les solutions s'écrivent sous la forme $\hat{k}_{t+1} = \phi_1 \hat{k}_t$ et $\hat{c}_t = \phi_2 \hat{k}_t$. Alors, en substituant dans l'équation (18) on obtient

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \phi_1 \end{bmatrix} \hat{k}_t = \begin{bmatrix} w_{11} + w_{12} \phi_2 \\ w_{21} + w_{22} \phi_2 \end{bmatrix} \hat{k}_t. \quad (20)$$

Les coefficients ϕ_1 et ϕ_2 sont donc donnés implicitement par le système

$$\begin{aligned} \phi_1 &= w_{11} + w_{12} \phi_2, \\ \phi_2 \phi_1 &= w_{21} + w_{22} \phi_2. \end{aligned}$$

Exercice Déterminer les valeurs propres de W . Montrer que ϕ_1 est égal à (une constante plus) la plus petite des valeurs propres de W et en déduire la valeur de ϕ_2 . Utiliser les résultats pour donner l'expression de \hat{n}_t , \hat{i}_t et \hat{y}_t .

La dynamique de transition : Exemple numérique (croissance.m)

On se donne les formes fonctionnelles suivantes :

$$u(C_t, L_t) = \log(C_t) + \theta_l \log(L_t) \quad (21a)$$

$$Y_t = AK_t^{1-\alpha} N_t^\alpha \quad (21b)$$

avec pour valeurs des paramètres : $\alpha = 0.58$, $\beta = 0.988$, $\delta = 0.025$. Le paramètre θ_l est choisi de manière à obtenir une valeur de N à l'équilibre stationnaire de 0.20. Le paramètre A est choisi de manière à normaliser à 1 la valeur de l'output Y à l'équilibre stationnaire. Le système linéarisé de ce modèle s'écrit

$$-\hat{c}_t = -\hat{c}_{t+1} + (1 - \beta(1 - \delta)) (\alpha \hat{n}_{t+1} - \alpha \hat{k}_{t+1}), \quad (22a)$$

$$-(1 - \alpha) \hat{n}_t + (1 - \alpha) \hat{k}_t = \hat{c}_t + \frac{\bar{N}}{1 - \bar{N}} \hat{n}_t, \quad (22b)$$

$$s_c \hat{c}_t + \frac{s_i}{\delta} \hat{k}_{t+1} = \left(1 - \alpha + s_i \frac{1 - \delta}{\delta}\right) \hat{k}_t + \alpha \hat{n}_t. \quad (22c)$$

Les graphiques 1a et 1b, basés sur le programme `croissance.m`, présentent la trajectoire des variables du modèle suite à une déviation du stock de capital de 1% en deçà de sa valeur d'équilibre stationnaire. Le graphique 1a présente les trajectoires en niveau et le graphique 1b les trajectoires en pourcentage de déviation par rapport aux valeurs d'équilibre stationnaire.

1.5 Le sentier de croissance équilibré

Un fait stylisé essentiel concernant les économies des pays développés est que le production par tête, la consommation par tête, l'investissement par tête ainsi que d'autres variables macroéconomiques ont tendance à croître sur longue période. Cette croissance de long terme s'effectue à des taux qui sont à peu près constant au sein des économies et qui présentent souvent des différences entre économies (cf. chapitre 1). Ces faits suggèrent l'existence d'un phénomène stable de croissance économique, lequel signifie que certaines variables macroéconomiques croissent à taux constant. On parle alors de trajectoire le long d'un sentier de croissance équilibré. On peut modifier le modèle présenté dans cette section de manière à ce qu'il rende compte de ce phénomène de croissance équilibrée. Pour ce faire, on introduit des restrictions sur les préférences et la technologie afin de les rendre compatibles avec une croissance de long terme des variables macroéconomiques.

Restrictions sur la technologie de production

Pour être compatible avec un sentier de croissance équilibré, le progrès technologique doit prendre la forme suivante : il vient augmenter la productivité du travail. Formellement, dans une fonction de production Cobb-Douglas, on doit avoir

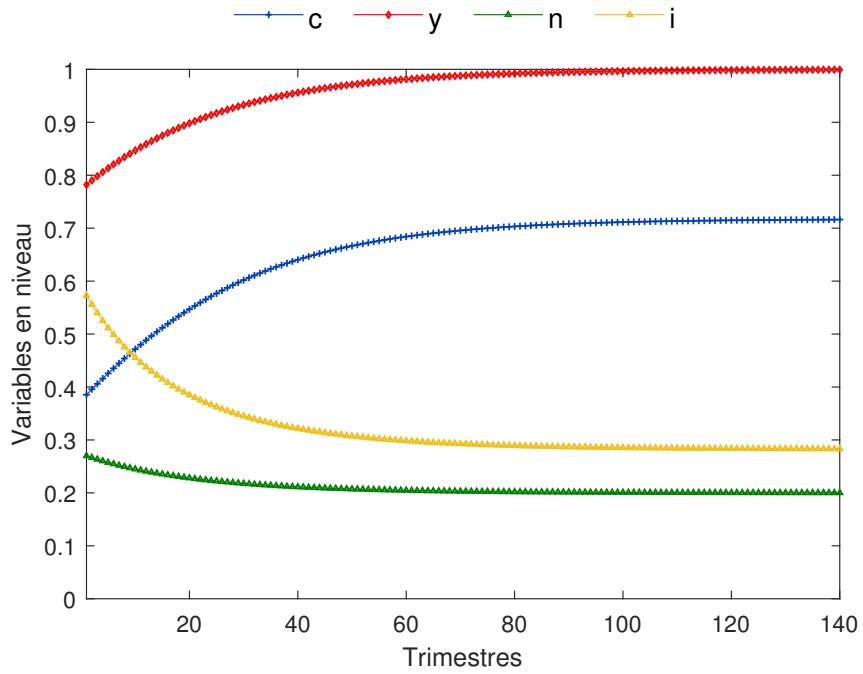
$$F(K_t, N_t) = AK_t^{1-\alpha} (X_t N_t)^\alpha \quad (23)$$

avec $0 < \alpha < 1$. Les chocs technologiques *permanents* sont ici mesurés par X_t qui vient accroître la productivité du facteur N_t . On désigne souvent la quantité $X_t N_t$ sous le terme d'*unités effectives de travail*.

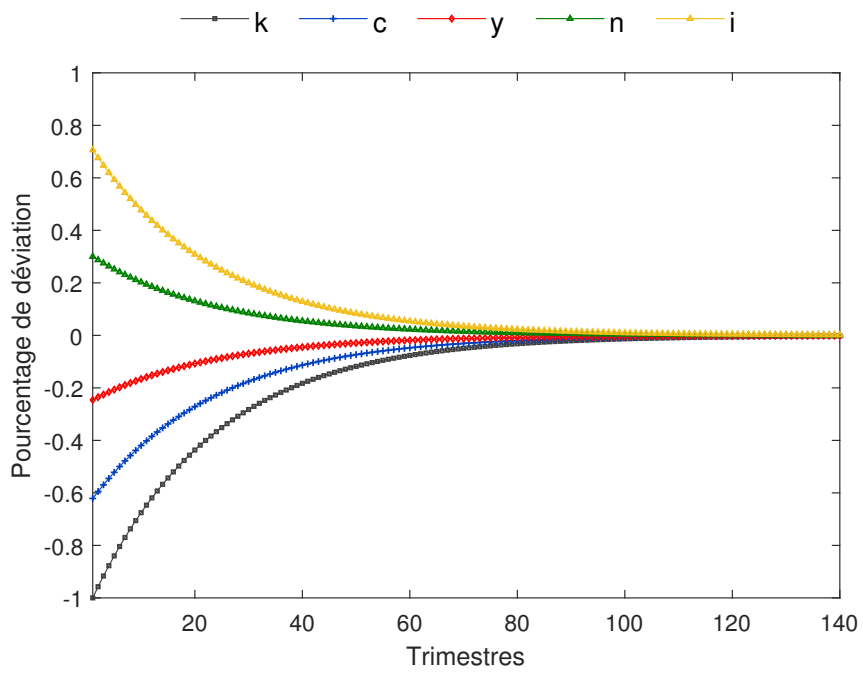
Dans la suite, γ_z signifie « 1 plus le taux de croissance de la variable Z_t », *i.e.*

$$\frac{Z_{t+1}}{Z_t} = \gamma_z.$$

Rappelons pour commencer que la quantité de facteur travail est bornée par 1, qui est la dotation en unité de temps de chaque ménage. Le travail est donc constant sur le long terme, si bien que $\gamma_n = 1$. Ensuite, l'équation d'accumulation du capital (2) implique que $\gamma_k = \gamma_i$. La fonction de production (23) et la contrainte de ressource impliquent alors que, le long d'un sentier de croissance équilibrée, on doit avoir $\gamma_c = \gamma_i = \gamma_y = \gamma_x$. En résumé, pour être compatibles avec le phénomène de croissance de long terme, le capital par tête, l'investissement, la consommation et la production doivent croître sur le long terme au même rythme que le progrès technologique qui affecte le facteur travail, dont le taux de croissance est $\gamma_x - 1$. Dans le même temps, le taux



(a) Variables en niveau



(b) Déviations par rapport à l'état stationnaire

Figure 1: La dynamique de transition dans le modèle sans croissance

de croissance sur le long terme des heures travaillées doit être nul. Dans une telle configuration, on remarque également que la productivité marginale du capital et la productivité marginale d'une unité efficace de travail sont constantes sur le long terme.

Restrictions sur les préférences

Le sentier de croissance équilibré doit également être compatible avec les conditions d'optimalité du choix des ménages. Pour ce faire, deux conditions doivent être respectées :

1. L'élasticité de substitution inter-temporelle de la consommation doit être indépendante du niveau de la consommation ;
2. Les effets de revenu et de substitution associés à la croissance de la productivité du travail doivent laisser l'offre de travail inchangée.

De telles conditions impliquent que la fonction d'utilité prend nécessairement l'une des formes suivantes :

$$u(C_t, L_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} v(L_t)$$

si $0 < \sigma < 1$ ou bien si $\sigma > 1$, et

$$u(C_t, L_t) = \log(C_t) + v(L_t)$$

si $\sigma = 1$. Il y a bien sûr des conditions supplémentaire qui doivent être respectées pour que la consommation et le loisir soient des biens normaux et pour que l'utilité soit globalement concave⁴. Avec ce type de préférences, l'élasticité de substitution inter-temporelle de la consommation est toujours égale à $1/\sigma$.

L'approche standard pour analyser ce type de modèle est de transformer l'économie avec croissance de long terme en une économie stationnaire autour de sa tendance de croissance de long terme. Cette transformation consiste à diviser toutes les variables du modèle par la composante X_t qui est à l'origine du trend de croissance. Ainsi, en posant $c_t \equiv C_t/X_t$, $i_t \equiv I_t/X_t$, $y_t \equiv Y_t/X_t$, et $k_{t+1} \equiv K_{t+1}/X_{t+1}$, on obtient comme condition d'Euler de l'économie stationnarisée autour de sa tendance de long terme :

$$-u_C(c_t, 1 - N_t) + \beta \gamma_x^{-\sigma} \left[u_C(c_{t+1}, 1 - N_{t+1}) \left((1 - \alpha) A \left(\frac{k_{t+1}}{N_{t+1}} \right)^{-\alpha} + 1 - \delta \right) \right] = 0 \quad (24a)$$

$$-u_L(c_t, 1 - N_t) + u_C(c_t, 1 - N_t) \alpha A \left(\frac{k_t}{N_t} \right)^{1-\alpha} = 0 \quad (24b)$$

avec, de plus, $c_t = Ak_t^{1-\alpha} N_t^\alpha + (1 - \delta) k_t - \gamma_x k_{t+1}$. Il faut également que $\beta \gamma_x^{1-\sigma} < 1$ afin que l'utilité inter-temporelle du ménage soit de valeur finie. Sous ces modifications, on remarque que l'économie avec sentier de croissance équilibré est équivalente à l'économie sans croissance

4. Sur ce point, on consultera la section 2.3 (et en particulier la note de bas de page n°11) et l'annexe technique de l'article de King et al. [1988].

étudiée dans les sections précédentes, avec toutefois deux différences liées au paramètre γ_x : (i) γ_x intervient dans l'équation d'accumulation du capital et (ii) γ_x modifie le facteur avec lequel le ménage escompte le futur.

Dynamique de transition avec croissance de long terme (`croissance.m`)

On reprend l'exemple précédent de la dynamique de transition, avec dans cette application $\gamma_x = 1.004$ et $\beta = 0.988$. Le système de ce modèle est

$$-\hat{c}_t = -\hat{c}_{t+1} + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_x} (1 - \delta)\right) (\alpha \hat{n}_{t+1} - \alpha \hat{k}_{t+1}), \quad (25a)$$

$$-(1 - \alpha) \hat{n}_t + (1 - \alpha) \hat{k}_t = \hat{c}_t + \frac{\bar{N}}{1 - \bar{N}} \hat{n}_t, \quad (25b)$$

$$s_c \hat{c}_t + s_i \frac{\gamma_x}{\delta + \gamma_x - 1} \hat{k}_{t+1} = \left(1 - \alpha + s_i \frac{1 - \delta}{\delta + \gamma_x - 1}\right) \hat{k}_t + \alpha \hat{n}_t. \quad (25c)$$

Les graphiques [2a](#) et [2b](#), basés sur le programme `croissance.m`, présentent la trajectoire des variables du modèle avec croissance de long terme suite à une déviation du stock de capital de 1% en deçà de sa valeur d'équilibre stationnaire.

2 Chocs agrégés : le modèle de cycle économique réel

On modifie le modèle de croissance néoclassique de manière à reproduire le comportement cyclique des séries temporelles des principaux agrégats économiques.

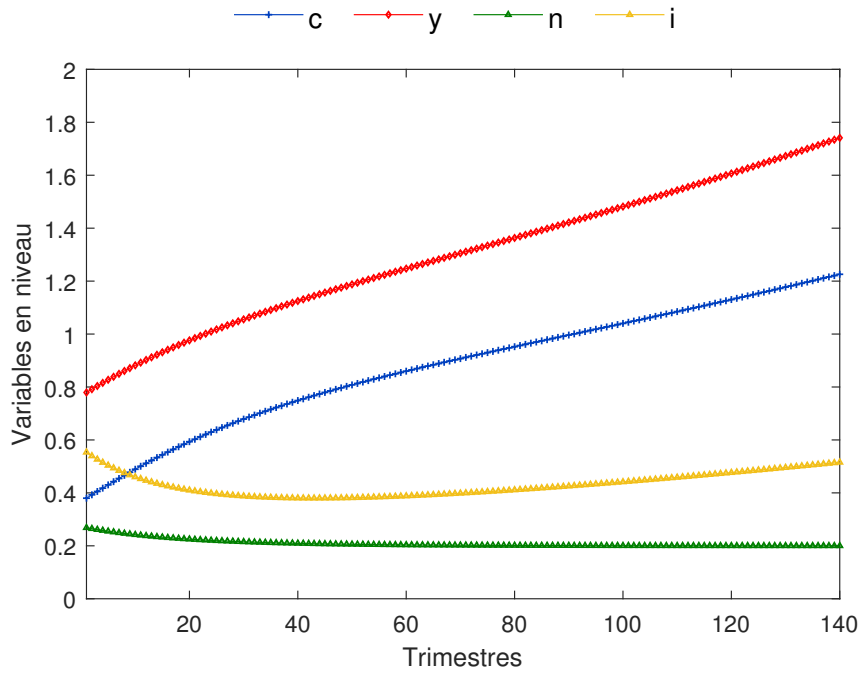
2.1 Le modèle RBC

On se donne désormais pour fonction de production :

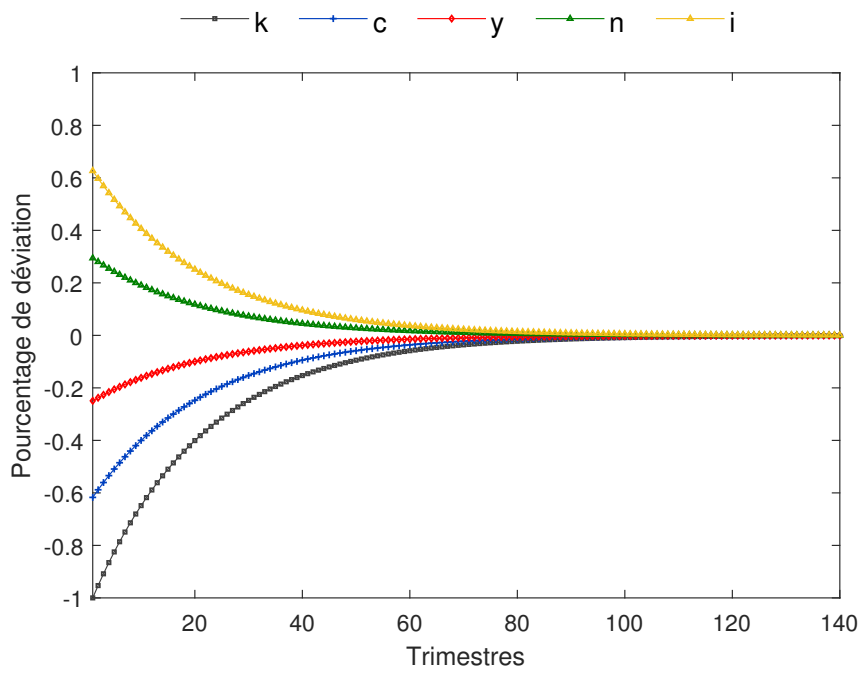
$$F(K_t, N_t) = A_t K_t^{1-\alpha} (X_t N_t)^\alpha.$$

Il y a une seule différence avec la technologie étudiée précédemment (équation (12)), à savoir que la productivité totale des facteurs est maintenant indexée par le temps t . On suppose désormais que A_t évolue selon un processus stochastique exogène stationnaire. La formulation habituellement retenue est la suivante :

$$\begin{aligned} A_t &= \bar{A} e^{a_t} \\ a_t &= \rho a_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned} \quad (26)$$



(a) Variables en niveau



(b) Déviations par rapport à l'état stationnaire

Figure 2: La dynamique de transition dans le modèle avec croissance

où ϵ_t est un processus de bruit blanc de variance σ_ϵ^2 et $\rho \in (0, 1)$ mesure la persistance des chocs. Le problème du planificateur social s'écrit alors :

$$\max_{\{K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(F(K_t, N_t) + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}, 1 - N_t) | I_0 \right] \quad (27)$$

s.c. $0 \leq N_t \leq 1, 0 \leq K_{t+1}, K_0, A_0$ donnés,

I_0 désignant l'ensemble d'information disponible à la date 0. L'ensemble d'information disponible à la date t contient les réalisations passées et la réalisation contemporaine de la variable aléatoire a_t ; bien entendu, il ne contient pas les réalisations de la variable postérieures à la date t . Définissons alors $a^t \equiv [a_t, a_{t-1}, \dots, a_0]$: c'est l'historique des réalisations du processus a_t jusqu'à la date t . La solution du problème du planificateur social consiste en une séquence $\{K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^\infty$ qui dépend de tous les *historiques* possibles $\{a^t\}_{t=0}^\infty$! Le problème se simplifie sous l'hypothèse que a_t suit le processus stochastique décrit par l'équation (26). En effet, il s'agit d'une chaîne de Markov d'ordre 1, ce qui implique que a_t contient toute l'information pertinente à la date t pour prévoir les réalisations postérieures à cette date. La tâche du planificateur à la date t est donc de choisir K_{t+1} et C_t en fonction de K_t et a_t (et non de choisir ceux-ci en fonction de toute l'histoire du processus a_t jusqu'à la date t)⁵. Le problème du planificateur social sous forme récursive s'écrit de la manière suivante :

$$v(K, a) = \max_{0 \leq N \leq 1, 0 \leq K'} u(F(K, N) + (1 - \delta)K - K', 1 - N) + \beta \mathbb{E}[v(K', a') | a]. \quad (28)$$

Dans le dernier terme à droite, on voit bien sûr apparaître l'espérance mathématique conditionnelle à la variable a . Ce dernier terme est parfois appelé « valeur de continuation ».

Les conditions du premier ordre et la condition de transversalité de ce problème sont

$$-u_C(C_t, 1 - N_t) + \beta \mathbb{E}_t \left[u_C(C_{t+1}, 1 - N_{t+1}) \times \left((1 - \alpha) A_{t+1} \left(\frac{K_{t+1}}{X_{t+1} N_{t+1}} \right)^{-\alpha} + 1 - \delta \right) \right] = 0 \quad (29a)$$

$$-u_L(C_t, 1 - N_t) + u_C(C_t, 1 - N_t) \alpha A \left(\frac{K_t}{X_t N_t} \right)^{1-\alpha} = 0 \quad (29b)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T \mathbb{E}_t [u_C(C_T, 1 - N_T) K_{T+1}] = 0 \quad (29c)$$

avec, de plus : $C_t = A_t K_t^{1-\alpha} (X_t N_t)^\alpha + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}$. Ici, \mathbb{E}_t désigne l'espérance mathématique conditionnelle à l'information disponible à la date t . De même que dans la section précédente, on peut stationnariser le modèle autour de sa tendance de croissance de long terme. Pour ce faire, il faut tenir compte du choc technologique; on définit alors $k_{t+1} = k(k_t, a_t)$, $c_t = c(k_t, a_t)$ et $N_t = n(k_t, a_t)$. Avec ces notations, le modèle RBC stationnarisé est décrit par

5. Pour une formulation générale du problème, *i.e.* une formulation dans laquelle les décisions dépendent de l'ensemble de l'historique des chocs aléatoires, voir le chapitre 12 de [Ljungqvist and Sargent \[2018\]](#).

les relations suivantes :

$$-u_C(c_t, 1 - N_t) + \beta \gamma_x^{-\sigma} \mathbb{E}_t \left[u_C(c_{t+1}, 1 - N_{t+1}) \right. \\ \left. \times \left((1 - \alpha) A_{t+1} \left(\frac{k_{t+1}}{N_{t+1}} \right)^{-\alpha} + 1 - \delta \right) \right] = 0 \quad (30a)$$

$$-u_L(c_t, 1 - N_t) + u_C(c_t, 1 - N_t) \alpha A \left(\frac{k_t}{N_t} \right)_t^{1-\alpha} = 0 \quad (30b)$$

$$c_t + \gamma_x k_{t+1} - (1 - \delta) k_t - A_t k_t^{1-\alpha} N_t^\alpha = 0. \quad (30c)$$

Dans la plupart des cas (*i.e.* pour la plupart des spécifications et des choix de valeurs des paramètres), on ne dispose pas d'une solution explicite. On doit donc procéder à une évaluation numérique des propriétés du modèle. Comme précédemment, on utilise une la méthode d'approximation par loglinéarisation. Il faut donc commencer par choisir un point autour duquel effectuer l'expansion de Taylor. A ce titre, il faut garder à l'esprit qu'un modèle avec des chocs stochastiques n'admet pas d'état stationnaire sous forme d'un vecteur d'allocation des ressources qui serait invariant dans le temps. Cependant, une pratique standard consiste à considérer que l'état stationnaire du modèle sans choc stochastique (ce qui correspond ici au modèle de croissance néoclassique de la section 1) donne une bonne approximation du vecteur d'allocation des ressources autour duquel, en moyenne, le modèle avec chocs stochastiques se situe. Cette pratique est discutable puisque rien ne garantit la qualité de cette approximation. Il se pourrait que cette allocation des ressources ait une faible probabilité d'occurrence au sein du modèle stochastique, ce qui rend peu intéressante l'étude la dynamique au voisinage de cet état. Ce problème est particulièrement pertinent dans le cas de modèles avec des contraintes d'inégalités qui ne sont saturées que dans certains états de la nature (*e.g.* contrainte pour emprunter, décisions irréversibles d'investissement, etc.) puisque, en général, ces contraintes ne sont pas saturées dans l'équilibre du modèle sans choc stochastique.

Les conditions d'optimalité loglinéarisées sont

$$\xi_{cc} \hat{c}_t - \xi_{cl} \frac{\bar{N}}{1 - \bar{N}} \hat{n}_t = \mathbb{E}_t \left[\xi_{cc} \hat{c}_{t+1} - \xi_{cl} \frac{\bar{N}}{1 - \bar{N}} \hat{n}_{t+1} \right. \\ \left. + (1 - \beta \gamma_x^{-\sigma} (1 - \delta)) \left(a_{t+1} + \alpha \hat{n}_{t+1} - \alpha \hat{k}_{t+1} \right) \right] \quad (31a)$$

$$a_t - (1 - \alpha) \hat{n}_t + (1 - \alpha) \hat{k}_t = (\xi_{lc} - \xi_{cc}) \hat{c}_t + (\xi_{cl} - \xi_{ll}) \frac{\bar{N}}{1 - \bar{N}} \hat{n}_t \quad (31b)$$

$$s_c \hat{c}_t + s_i \frac{\gamma_x}{\delta + \gamma_x - 1} \hat{k}_{t+1} = a_t + \left(1 - \alpha + s_i \frac{1 - \delta}{\delta + \gamma_x - 1} \right) \hat{k}_t + \alpha \hat{n}_t \quad (31c)$$

En procédant par substitution de manière à éliminer \hat{n}_t , et en appliquant le principe d'équivalent

certain, on peut exprimer ce système sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_t \begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ a_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ a_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ 0 & \rho & 0 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}.$$

On cherche une solution sous la forme $\hat{k}_{t+1} = \phi_{11}\hat{k}_t + \phi_{12}a_t$ et $\hat{c}_t = \phi_{21}\hat{k}_t + \phi_{22}a_t$. En remplaçant dans ce système, il vient que

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \rho \\ \phi_{21}\phi_{11} & \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} + w_{13}\phi_{21} & w_{12} + w_{13}\phi_{22} \\ 0 & \rho \\ w_{31} + w_{33}\phi_{21} & w_{32} + w_{33}\phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ a_t \end{bmatrix}.$$

On obtient les valeurs des coefficients ϕ 's grâce au système d'équations

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= w_{11} + w_{13}\phi_{21} \\ \phi_{12} &= w_{12} + w_{13}\phi_{22} \\ \phi_{21}\phi_{11} &= w_{31} + w_{33}\phi_{21} \\ \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}\rho &= w_{32} + w_{33}\phi_{22} \end{aligned}$$

De même que précédemment, le système admet plusieurs solutions. On départage les solutions en sélectionnant celle qui satisfait les conditions de transversalité du problème.

Après avoir obtenu les valeurs des ϕ 's, on peut exprimer directement les fonctions de décisions pour l'investissement, l'output, les heures travaillées et les autres variables d'intérêt du modèle. Il est alors utile d'écrire la solution sous la forme

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= Gs_t + Fe_{t+1}, \\ z_t &= Hs_t. \end{aligned} \tag{32}$$

s_t est un vecteur de taille $m \times 1$ contenant les variables d'état du modèle, e_{t+1} est un vecteur de taille $l \times 1$ contenant les perturbations exogènes, z_t est un vecteur de taille $n \times 1$ contenant les variables d'intérêt. G est de taille $m \times m$, F est de taille $m \times l$ et H est de taille $n \times m$. Autrement dit, le modèle possède m variables d'état, l perturbations exogènes et n variables d'intérêt. Dans le cas du modèle RBC simple, on a : $m = 2$ et $s_t = \begin{bmatrix} \hat{k}_t & a_t \end{bmatrix}'$, $l = 1$ et $e_{t+1} = \epsilon_{t+1}$, et par exemple $n = 4$ et $z_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_t & \hat{c}_t & \hat{i}_t & \hat{n}_t \end{bmatrix}'$.

Fonctions de réponse

Les fonctions de réponse fournissent de l'information concernant la réponse moyenne conditionnelle du système (32) à la suite d'un choc survenu en période t . En effet, en période $t + k$ la réponse

du j -ème élément de e_{t+1} suite à un choc en période $t + 1$ est

$$\begin{aligned} s_{t+k} - \mathbb{E}[s_{t+k}|s_t] &= G^{k-1} F \varepsilon_{t+1}^j \\ z_{t+k} - \mathbb{E}[z_{t+k}|s_t] &= H G^{k-1} F \varepsilon_{t+1}^j. \end{aligned} \quad (33)$$

Ici, ε_{t+1}^j est un vecteur de taille $l \times 1$ composé uniquement de 0, sauf à la j -ème position où figure le j -ème élément de e_{t+1} .

Simulation du modèle

Le modèle peut être simulé en itérant sur l'équation (32) pour une séquence donnée de chocs aléatoires e .

Exemple numérique (modeleRBC.m)

On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(C_t, L_t) = \log(C_t) + \theta_l \log(L_t)$$

avec pour valeurs des paramètres : $\alpha = 0.58$, $\beta = 0.988$, $\delta = 0.025$, $\gamma_x = 1.004$. θ_l est choisi de manière à ce que la valeur de N à l'équilibre stationnaire soit égale à 0.20 et A est choisi de manière à normaliser à 1 la valeur de l'output Y à l'équilibre stationnaire. Le paramètre de persistance du processus auto-régressif qui régit le choc technologique est $\rho = 0.90$. Ce choix de paramètres correspond à ce que King et al. [1988] appellent le « cas Long-Plosser avec un taux de dépréciation du capital réaliste » (tableau 2 de King et al. [1988])⁶. Le système loglinéarisé est

$$-\hat{c}_t = \mathbb{E}_t \left[-\hat{c}_{t+1} + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_x} (1 - \delta) \right) (a_{t+1} + \alpha \hat{n}_{t+1} - \alpha \hat{k}_{t+1}) \right] \quad (34a)$$

$$a_t - (1 - \alpha) \hat{n}_t + (1 - \alpha) \hat{k}_t = \hat{c}_t + \frac{\bar{N}}{1 - \bar{N}} \hat{n}_t \quad (34b)$$

$$s_c \hat{c}_t + s_i \frac{\gamma_x}{\delta + \gamma_x - 1} \hat{k}_{t+1} = a_t + \left(1 - \alpha + s_i \frac{1 - \delta}{\delta + \gamma_x - 1} \right) \hat{k}_t + \alpha \hat{n}_t \quad (34c)$$

Le graphique 3 présente les fonctions de réponse correspondant à un choc technologique positif d'une valeur de 1%, et le graphique 4 donne un exemple de trajectoire des différentes séries simulées à partir de ce modèle RBC en utilisant $\sigma_\varepsilon = 0.01$ pour l'écart-type du processus de choc technologique.

6. Dans l'article de Long Jr and Plosser [1983], on suppose que le capital se déprécie intégralement à chaque période (*i.e.* $\delta = 100\%$). Cette simplification permet de résoudre le modèle explicitement, c'est à dire d'obtenir une formule exacte pour toutes les règles de décision du modèle.

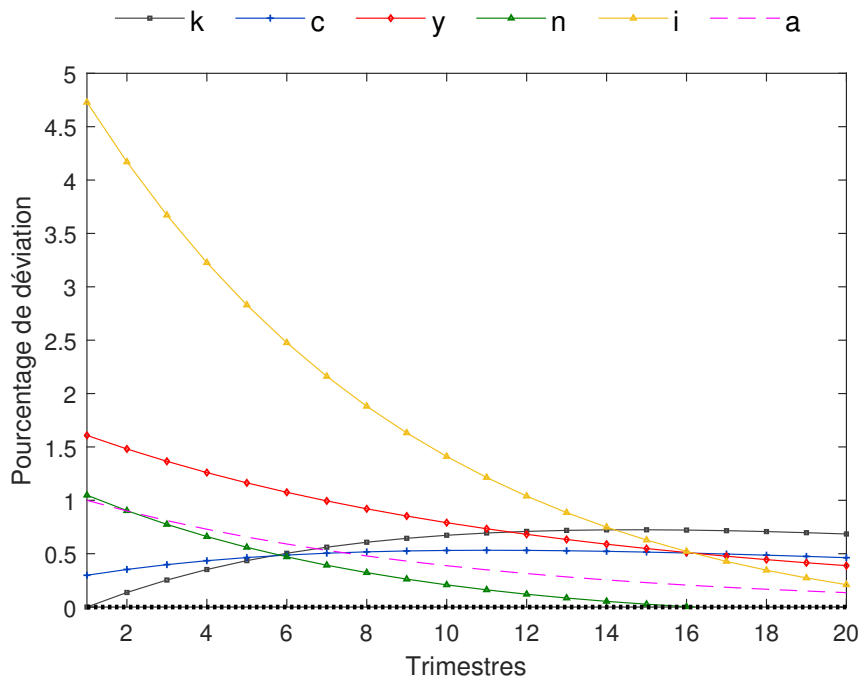


Figure 3: Fonction de réponse suite à un choc technologique positif

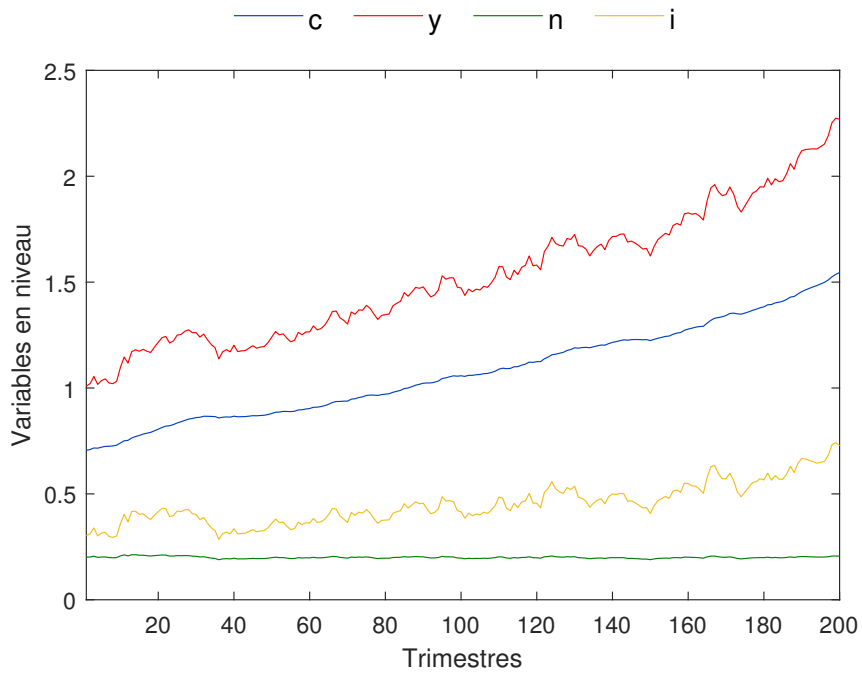


Figure 4: Exemple de séries simulées dans le modèle RBC standard

2.2 Comptabilité de la croissance

Le modèle repose sur la fonction de production Cobb-Douglas

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} (X_t N_t)^\alpha.$$

En passant au logarithme, il vient que

$$\log Y_t = \log A_t + \alpha \log X_t + (1 - \alpha) \log K_t + \alpha \log N_t.$$

Le *résidu de Solow* est alors

$$\begin{aligned} \log SR_t &= \log Y_t - \alpha \log N_t - (1 - \alpha) \log K_t \\ &= \log A_t + \alpha \log X_t \end{aligned}$$

Le résidu de Solow peut être mesuré empiriquement en utilisant les séries temporelles de l'output, du capital et des heures travaillées. La série temporelle du stock de capital peut être obtenue à partir de l'équation d'accumulation du capital : il suffit pour cela de se donner des valeurs k_0 et δ et d'utiliser la série temporelle de l'investissement. Ainsi, dans ce modèle RBC simple le résidu de Solow permet de mesurer le processus empirique suivi par la technologie.

2.3 La relation théorie vs. faits empiriques : calibration et analyse du modèle RBC

L'exercice de calibration

Dans la définition qu'en donne [Canova \[2011\]](#), la *calibration* est un ensemble de procédures visant à répondre à une question économique au moyen d'un modèle qui approxime le processus générateur des données observées – le DGP, *data generating process* –, ou d'une partie de ces données observées. La méthodologie est essentiellement la suivante :

1. Définir la question économique à laquelle on souhaite répondre. Typiquement, ce type de question s'exprime de la manière suivante :
 - (a) Quelle partie du fait X peut être expliquée par le mécanisme Y ?
 - (b) Peut-on générer des faits du type F au moyen de la théorie T ?
 - (c) Peut-on réduire l'écart D qui sépare la théorie des données empiriques en faisant appel aux faits du type F ?
 - (d) De combien les variables endogènes K varient-elles lorsqu'on fait varier les variables exogènes L ?
2. Choisir un modèle qui apparaît pertinent pour répondre à la question posée.
3. Choisir des formes fonctionnelles s'exprimant en fonction des primitives du modèle. Trouver une solution (mathématique ou numérique) pour relier les variables endogènes aux variables exogènes et aux paramètres du modèle.

4. Evaluer la performance du modèle en comparant les données qu'il produit avec un ensemble de faits stylisés caractérisant les données réelles.
5. Proposer une réponse à la question posée et évaluer le taux de confiance (au sens statistique) de cette réponse. Lorsque cela est pertinent, proposer une analyse en termes de politique économique.

Les faits stylisés dont il est question ici peuvent être des statistiques descriptives (écarts-types, corrélations, etc.), des histogrammes, des coefficients d'un modèle VAR, une fonction de vraisemblance, des fonctions de réponse empiriques, etc. Au sens strict, un modèle économique n'est jamais qu'une approximation du DGP ; en ce sens, il est donc toujours faux et irréaliste. Le travail de calibration consiste à obtenir d'un modèle qu'il rende compte d'un grand nombre de faits stylisés tout en maintenant une structure parcimonieuse (en comparaison avec la complexité du réel). Il est alors raisonnable de se servir de ce modèle comme d'un laboratoire permettant de conduire des expériences. Par exemple, un modèle qui est capable de bien rendre compte de ce qui s'est produit empiriquement lors de réformes fiscales passées peut raisonnablement servir d'outil pour étudier les effets d'une réforme fiscale à venir.

La partie du travail la plus délicate concerne le choix des paramètres et des processus stochastiques du modèle. L'approche communément adoptée dans le cas de la modélisation DSGE est la suivante :

1. Choisir les paramètres de telle sorte que les variables endogènes du modèle prennent pour valeur à l'état stationnaire du modèle déterministe la valeur moyenne des séries temporelles de l'économie réelle.
2. Certains paramètres ne peuvent pas être déterminés par l'état stationnaire du modèle déterministe. Pour ces paramètres, on peut choisir d'adopter une des stratégies suivantes :
 - (a) Utiliser les valeurs de paramètre issues d'estimations micro-économétriques (lorsque celles-ci existent) ;
 - (b) Conduire une estimation de manière informelle en se donnant un critère à optimiser ;
 - (c) Conduire une estimation formelle en utilisant une des méthodes suivantes : moments généralisés (GMM), maximum de vraisemblance (MLE) ou méthode des moments simulés (SMM)

Si la valeur de certains paramètres est encore indéterminée au terme de ce travail (si bien que ces paramètres sont alors choisis avec un risque d'arbitraire), il faut conduire une analyse dite de robustesse. Le but de cette analyse est de déterminer de quelle manière les variables endogènes du modèle changent lorsqu'on fait varier la valeur de ces paramètres arbitraires.

Calibration du modèle RBC

On procède maintenant à la calibration du modèle RBC présenté dans les sections précédentes. Pour ce faire, on se propose d'adopter l'approche de [King et al. \[1988\]](#). Une période de temps du modèle est interprétée comme l'équivalent d'un trimestre (c'est la fréquence des

données U.S. dont on dispose). Pour la fonction d'utilité, on utilise la forme suivante :

$$u(C_t, L_t) = \log(C_t) + \frac{\theta_l}{1-\xi} L_t^{1-\xi}.$$

Elle implique que les élasticités croisées sont nulles : $\xi_{lc} = \xi_{cl} = 0$, et que l'élasticité pour la consommation est unitaire : $\sigma = -\xi_{cc} = 1$. Pour la fonction de production, on continue de travailler avec une fonction Cobb-Douglas à rendements d'échelle constants. On peut justifier cette hypothèse en remarquant que, dans les données, les parts respectives du travail et du capital semblent effectivement indépendante de la taille de l'économie considérée.⁷

Les paramètres α , β , γ_x , δ et θ_l sont choisis de manière à reproduire, à l'état stationnaire du modèle déterministe, la valeur moyenne de séries temporelles calculées sur données américaines.

La part du travail α : En situation de concurrence pure et parfaite, le salaire réel est égal à la productivité marginale du travail à n'importe quelle date t , *i.e.* $w_t = \alpha \frac{Y_t}{N_t}$. Par conséquent, la masse salariale est $w_t N_t = \alpha Y_t$ si bien que α mesure la part des revenus du travail dans la richesse produite. De la même manière, on montre que les revenus du capital correspondent à $(1 - \alpha) Y_t$. On choisit donc le paramètre α de manière à reproduire la moyenne du ratio entre masse salariale et production en termes réels. Dans les données U.S., ce calcul donne en général : $\alpha = 0.58$.

Le taux de croissance technologique $\gamma_x - 1$: Le taux de croissance technologique correspond à la tendance de croissance commune à l'output, à la consommation et à l'investissement. Dans les données U.S., celle-ci est en moyenne de 1.6% par an. On obtient ainsi : $\gamma_x = (1 + 0.016)^{0.25} = 1.004$.

Le facteur d'escompte β : Le rendement réel moyen des actions, qui correspond dans le modèle à $1 + r - \delta$, est d'environ 6.5% par an dans les données U.S. Le facteur d'escompte *effectif* du modèle RBC avec croissance est $\beta \gamma_x^{1-\sigma} = \gamma_x / (1 + r - \delta) = 1.016^{0.25} / 1.065^{0.25}$ (on utilise parfois, par exemple dans `modeleRBC1.m` et `modeleRBC2.m`, la notation $\beta^* = \beta \gamma_x^{1-\sigma}$, pour désigner le facteur d'escompte effectif). On obtient $\beta \approx 0.988$.

Le taux de dépréciation du capital δ : Pour commencer, on remarque que le niveau moyen de la TFP, \bar{A} , ne joue aucun rôle dans la dynamique du modèle ; \bar{A} est ce qu'on appelle un « paramètre d'échelle ». Sans perte de généralité, on fixe donc sa valeur de manière à normaliser à 1 la valeur de l'output à l'équilibre stationnaire du modèle. Ensuite, dans les données U.S. le ratio entre l'investissement et l'output vaut en moyenne 0.295. En utilisant l'équation d'accumulation du capital, et après normalisation de la valeur de l'output, le ratio I/Y est donné par

$$\bar{I} = (\gamma_x + \delta - 1) \bar{K}.$$

7. En présence de progrès technologique affectant l'efficacité du travail, cette propriété (part du travail constante dans le temps) est en fait vérifiée avec n'importe quelle fonction de production à rendements d'échelle constants.

De plus, l'équation d'Euler pour l'investissement donne

$$1 = \frac{\beta}{\gamma_x} \left[\frac{1 - \alpha}{\bar{K}} + 1 - \delta \right].$$

En combinant ces équations, on obtient $\delta = 0.025$, ce qui correspond à un taux annuel de dépréciation de 10%.

L'état stationnaire du modèle déterministe est indépendant de l'élasticité de l'utilité marginale du loisir par rapport au loisir, $\xi_{ll} = -\xi$, et des paramètres de persistance et de variance des chocs ρ et σ_ε^2 . On doit donc procéder différemment pour déterminer la valeur des ces derniers paramètres.

Les paramètres de préférence pour le loisir ξ et θ_l : Pour commencer, on choisit la valeur de \bar{N} correspondant à la fraction du temps dont dispose le ménage à chaque période et qu'il choisit d'allouer au travail. Une contrepartie empirique raisonnable consiste à rapporter la durée du travail hebdomadaire à la durée totale de la semaine. Ainsi, on obtient $\bar{N} = 0.20$. Ensuite, on remarque que, via la condition d'optimalité de l'offre de travail, le paramètre θ_l de valorisation du loisir vérifie

$$\theta_l = \alpha \frac{(1 - \bar{N})^\xi}{\bar{N}} \frac{1}{1 - \bar{I}}$$

quelle que soit la valeur de ξ . La valeur de θ_l va donc être impliquée par celle du paramètre ξ . Pour ce dernier, on étudie l'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire, qui est donnée dans le modèle par $\frac{1 - \bar{N}}{\bar{N}} / \xi$. Les études micro-économétriques suggèrent que cette élasticité est faible, tout au plus égale à 0.4 (cf. annexe C du cours). Cette valeur impliquerait $\xi = 10$. On va cependant suivre [King et al. \[1988\]](#) dans le choix d'une valeur de ξ bien plus faible, à savoir $\xi = 1$. Ce choix correspond à une élasticité d'offre de travail par rapport au salaire égale à 4.

Les paramètres du processus technologique ρ et σ_ε : [King et al. \[1988\]](#) proposent d'utiliser $\rho = 0.9$ et $\sigma_\varepsilon = 0.01$. Ces valeurs impliquent que $\sigma_a = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1 - \rho^2}} = 0.0229$.

Calcul des moments On peut calculer explicitement les moments du modèle (c'est-à-dire les moments des données qui seraient obtenues par simulation du modèle). La matrice de variance-covariance des variable d'état du modèle Σ_s est donnée par

$$\Sigma_s = \mathbb{E} [s_t s_t'] = G \Sigma_s G' + \Sigma_e$$

en notant Σ_e la matrice de variance-covariance des perturbations exogènes. [Hamilton \[1994\]](#) (p. 265) montre qu'on peut calculer les éléments de Σ_s grâce à la relation

$$\text{vec}(\Sigma_s) = [I_m - G \otimes G]^{-1} \text{vec}(\Sigma_e)$$

avec I_m la matrice identité d'ordre m . Par ailleurs, on s'intéresse aussi aux moments des

variables qui composent z_t . l'auto-covariance de z d'ordre j (c'est-à-dire la covariance de z avec lui-même retardé j fois) est

$$\Sigma_s = \mathbb{E} [z_t z_t'] = HG^j \Sigma_s H'.$$

Les calculs sont effectués à la fin du programme Matlab `modeleRBC1.m`. Le code `modeleRBC2.m` réalise les mêmes calculs en utilisant les programmes Matlab qui accompagnent `solab.m`.

Le tableau 1a présente les résultats issus de cette calibration du modèle RBC. King et al. [1988] comparent les moments du modèle aux moments empiriques filtrés par rapport à une tendance linéaire.⁸ Kydland and Prescott [1982] adoptent une approche sensiblement différente : ils comparent les moments du modèle aux moments empiriques obtenus à l'aide du filtre HP. Par conséquent, ils appliquent également un filtre HP aux données du modèle simulé. Le tableau 1b présente les résultats de la comparaison à la Kydland and Prescott [1982].

3 Performance et extensions du modèle

3.1 Evaluation du modèle RBC

Les articles de King and Rebelo [1999] et de Rebelo [2005] proposent un panorama de la littérature consacrée à la performance du modèle RBC. On peut s'y rapporter pour traiter l'exercice suivant.

Exercice Justifier les critiques suivantes adressées au modèle RBC standard :

1. Le modèle de croissance néoclassique ne peut pas générer la persistance observée dans les données sans supposer que les chocs technologiques sont eux-mêmes fortement auto-corrélés (*i.e.* le modèle ne peut se passer d'une valeur de ρ élevée).
2. Avec une valeur de l'élasticité d'offre de travail semblable à celle obtenue dans les études micro-économétriques, le modèle RBC génère des mouvements de faible amplitude en réponse aux chocs technologiques. En particulier, sous ce choix de paramètres, le modèle génère des fluctuations des heures travaillées de faible amplitude même lorsque les fluctuations de l'output sont importantes. Le modèle est donc incompatible avec la volatilité du facteur travail observée dans les données.
3. La corrélation entre le salaire réel et l'output est plus faible dans les données qu'elle ne l'est dans le modèle RBC (Pour répondre à cette question, construire une série temporelle du salaire réel).

8. King et al. [1988] remarquent que, puisque le modèle implique par exemple que

$$\hat{y}_t = \log Y_t - \log X_t - \log \bar{y} = \log Y_t - \log X_0 - t \log \gamma_x - \log \bar{y},$$

il est plus cohérent de filtrer les données en utilisant une tendance linéaire. Dans un ordre d'idée voisin, les auteurs choisissent de ne pas filtrer la série empirique d'heures travaillées pour la comparer au modèle. Pour cette raison, ils obtiennent un coefficient de corrélation travail/output très différent de celui de Kydland and Prescott [1982] (0.07 dans le tableau 1a vs. 0.85 dans le tableau 1b).

Table 1: Performance du modèle RBC standard

(a) Moments du cycle économique obtenus avec une tendance linéaire

Variable x	$\sigma(x_t)$	$\frac{\sigma(x_t)}{\sigma(\hat{y}_t)}$	$\rho(x_t, \hat{y}_t)$	$\rho(x_t, x_{t-1})$
Données (King et al. [1988], tableau 6)				
\hat{y}_t	5.62	1.00	1.00	0.96
\hat{c}_t	3.86	0.69	0.85	0.98
\hat{i}_t	7.61	1.35	0.60	0.93
\hat{n}_t	2.97	0.52	0.07	0.94
Modèle				
\hat{y}_t	4.26	1.00	1.00	0.93
\hat{c}_t	2.73	0.64	0.82	0.99
\hat{i}_t	9.81	2.30	0.92	0.88
\hat{n}_t	2.05	0.48	0.79	0.86

Notes : Les données correspondent à la période 1950Q1–1986Q4.

(b) Moments du cycle économique obtenus avec un filtre HP

Variable x	$\sigma(x_t)$	$\frac{\sigma(x_t)}{\sigma(\hat{y}_t)}$	$\rho(x_t, \hat{y}_t)$	$\rho(x_t, x_{t-1})$
Données (Kydland and Prescott [1982], tableau IV)				
\hat{y}_t	1.8	1.00	1.00	0.71
\hat{c}_t	1.3	0.72	0.74	
\hat{i}_t	5.1	2.83	0.71	
\hat{n}_t	2.0	1.11	0.85	
Modèle				
\hat{y}_t	2.07	1.00	1.00	
\hat{c}_t	0.52	0.25	0.78	
\hat{i}_t	6.09	2.94	0.99	
\hat{n}_t	1.36	0.65	0.98	

Notes : Les données correspondent à la période 1950Q1–1979Q2.

4. Le taux de croissance de l'output est positivement autocorrélé dans les données alors que sa corrélation est proche de 0 dans le modèle RBC.
5. Le résidu de Solow du modèle suggère des fluctuations de la productivité démesurées. Il arrive que le résidu de Solow s'effondre, ce qui signifie que les récessions sont le fruit d'une régression technologique (Pour répondre à cette question, construire une série temporelle du résidu de Solow du modèle RBC).

3.2 Quelques extensions du modèle RBC standard

- *Travail indivisible* : Hansen [1985], "Indivisible labor and the business cycle", *Journal of Monetary Economics*, 16(3), pp. 309–327.
- *Chocs technologiques d'investissement et taux variable d'utilisation des capacités* : Greenwood et al. [1988], "Investment, capacity utilization, and the real business cycle", *American Economic Review*, 78(3), pp. 402–417.
- *Production domestique* : Benhabib et al. [1991], "Homework in macroeconomics : Household production and aggregate fluctuations", *Journal of Political Economy*, 99(6), pp. 1166–1187.
- *Chocs de consommation du secteur public* : Christiano and Eichenbaum [1992], "Current real-business-cycle theories and aggregate labor-market fluctuations", *American Economic Review*, 82(3), pp. 430–450.
- *Coûts d'ajustement du travail* : Cogley and Nason [1995], "Output dynamics in real-business-cycle models", *American Economic Review*, 85(3), pp. 492–511.
- *Economie ouverte de petite taille* : Mendoza [1991], "Real business cycles in a small open economy", *American Economic Review*, 81(4), pp. 797–818 ; Correia et al. [1995], "Business cycles in a small open economy", *European Economic Review* 39(6), pp. 1089–1113.
- *Modèle à deux pays* : Backus et al. [1992], "International real business cycles", *Journal of Political Economy*, 100(4), pp. 745–775.
- *Persistance des habitudes de consommation et prix des actifs* : Boldrin et al. [2001], "Habit persistence, asset returns, and the business cycle", *American Economic Review*, 91(1), pp. 149–166.
- *Chocs technologiques d'information* : Jaimovich and Rebelo [2009], "Can news about the future drive the business cycle?", *American Economic Review*, 99(4), pp. 1097–1118.